

**Мохамед**(M. G. Mohamed)  
El-Minia University, APE**Даффи**

(J. Duffy)

University of Florida, Гейнсвилл, шт. Флорида

## Непосредственное определение мгновенной кинематики роботов с параллельным расположением приводов

(A Direct Determination of the Instantaneous Kinematics of Fully Parallel Robot Manipulators)

*Рассматривается применение теории винтов для исследования мгновенных перемещений исполнительного органа (платформы) робототехнического устройства с полностью параллельным расположением приводов. Мгновенное перемещение исполнительного органа определяется непосредственно через повороты в шарнирах, связанных с приводами. Кроме того, показано, что поворот, соответствующий мгновенному перемещению исполнительного органа, равен сумме отдельных поворотов в шарнирах. Отдельный поворот определяется как поворот, соответствующий мгновенному перемещению исполнительного органа при всех запертых приводах, кроме одного. Представленные исследования могут служить хорошей основой для изучения особых конфигураций в устройствах с параллельным расположением приводов.*

### Введение

Подавляющее большинство существующих промышленных роботов моделируется кинематической структурой с последовательным соединением звеньев и приводов. Для таких конструкций разработано множество методов решения задач мгновенной кинематики.

Мгновенная кинематика таких последовательных соединений хорошо описывается с помощью теории винтов. При этом в связи с усложненностью кинематической структуры устройств с параллельным расположением приводов (по сравнению со структурой последовательных соединений) их исследованию уделяли меньше внимания или даже вообще упускали их из виду. Настоящая статья, так же как и предыдущая работа [1], посвящена аналитическому исследованию вопросов мгновенной кинематики устройств с параллельным расположением приводов на основе теории винтов.

В работах [1—3] был сделан вывод об отсутствии очевидных преимуществ в использовании смещенных  $d$ -устройств. Поэтому в настоящей работе исследуется мгновенная кинематика только устройств с параллельным расположением приводов для плоскости ( $M = 3$ ) и для пространства ( $M = 6$ ). В работах [1, 2] делается также вывод о том, что устройства с параллельным расположением приводов могут иметь практическую ценность, если они полностью или частично запараллелены. Устройства с полностью параллельным расположением приводов можно в свою очередь классифицировать по расположению шарниров, управляемых или неуправляемых от приводов. «Симметричное» устройство удовлетворяет следующим требованиям:

- каждая из параллельных цепочек имеет одинаковое количество шарниров;
- каждая из параллельных цепочек имеет одинаковое количество шарниров, управляемых от приводов;
- местоположение приводов в каждой из параллельных цепочек одинаково.

Представлено на конференцию ASME по конструированию, 7—10 октября 1984 г., Кеймбридж, шт. Массачусетс; получено редакцией 10 июля 1984 г.

Если хотя бы одно из указанных требований не выполняется, то такое устройство будем называть «асимметричным».

Изучение вопросов мгновенной кинематики различных кинематических структур было впервые рассмотрено в работе [4], где автор ввел определение мгновенной кинематики для последовательных и параллельных соединений. Однако в работе [5], а позднее в [6] было показано, что введение понятий последовательного и параллельного соединений недостаточно для определения относительной свободы двух тел, соединенных между собой пересекающимися шарнирами.

В работе [7] был сформулирован закон замкнутых механических систем, аналогичный закону Кирхгофа для электрических цепей.

Отправной точкой настоящей работы была выработка нового, улучшенного по сравнению с [7] подхода для анализа мгновенной кинематики устройств платформенного типа. В предыдущей работе [1] был представлен новый подход для определения мгновенных перемещений исполнительного органа устройств платформенного типа с полностью параллельным расположением приводов. Новый подход заключался в получении в явном виде выражений для неизвестных скалярных коэффициентов  $\omega_j^{(i)}$ , которые соответствуют вращениям в шарнирах в одной из параллельных цепочек, связывающих исполнительное устройство с основанием (при этом использовались замкнутые уравнения скоростей). Однако дальнейшие исследования привели к разработке нового метода, улучшенного по сравнению с подходом [1]. Суть этого метода заключается в том, что мгновенные перемещения исполнительного органа выражаются непосредственно через известные входные скалярные величины, которые определяют вращения в шарнирах, управляемых от приводов. В настоящей статье рассмотрен именно такой подход.

Оба упомянутых метода послужили для формулировки новой важной теоремы: для любого устройства с параллельным расположением приводов вращение, определяющее мгновенное перемещение исполнительного устройства (платформы), равно сумме отдельных вращений в шарнирах.

Под отдельным вращением понимается вращение, соответствующее мгновенному перемещению

исполнительного устройства, когда все приводы, кроме одного, заперты. Авторы надеются, что полученные результаты будут способствовать дальнейшему исследованию особых конфигураций устройств с полностью параллельным расположением приводов. В таких особых конфигурациях винтовая система вырождается, а исполнительное устройство теряет одну или более степеней свободы.

риваемой цепочке, кроме винта, связанного с одним из управляющих приводов. Учитывая ортогональность обеих частей уравнения (1) с соответствующим ортогональным винтом  $\$_{om}^{(i)}$  (ортогональным всем винтам, кроме  $\$_m^{(i)}$ , в  $i$ -й цепочке), при  $i = 1, 2, \dots, N$  и  $m = 1, 2, \dots, g$  получаем  $M (= gN)$  линейных уравнений. Систему из  $M$  линейных уравнений можно записать в матричном виде следующим образом:

$$\begin{bmatrix} \hat{\$} \cdot \$_{o1}^{(1)} \\ \hat{\$} \cdot \$_{o2}^{(1)} \\ \vdots \\ \hat{\$} \cdot \$_{og}^{(1)} \\ \hat{\$} \cdot \$_{o1}^{(2)} \\ \hat{\$} \cdot \$_{o2}^{(2)} \\ \vdots \\ \hat{\$} \cdot \$_{og}^{(2)} \\ \vdots \\ \hat{\$} \cdot \$_{og}^{(N)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \$_1^{(1)} \cdot \$_{o1}^{(1)} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \$_2^{(1)} \cdot \$_{o2}^{(1)} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \$_g^{(1)} \cdot \$_{og}^{(1)} & 0 & \$_1^{(2)} \cdot \$_{o1}^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \$_2^{(2)} \cdot \$_{o2}^{(2)} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \$_g^{(N)} \cdot \$_{og}^{(N)} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_1^{(1)} \\ \omega_2^{(1)} \\ \vdots \\ \omega_g^{(1)} \\ \omega_1^{(2)} \\ \omega_2^{(2)} \\ \vdots \\ \omega_g^{(2)} \\ \vdots \\ \omega_g^{(N)} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

## Уравнение вращения

Вращение  $\hat{\$} (= \omega \$)$ , определяющее мгновенное перемещение исполнительного органа в симметричном устройстве с полностью параллельным расположением приводов (фиг. 1), имеющем  $M$  степеней свободы, можно выразить как линейную комбинацию вращений в шарнирах в любой из  $N$  параллельных цепочек:

$$\hat{\$} = \omega \$ = \omega_1^{(n)} \$_1^{(n)} + \omega_2^{(n)} \$_2^{(n)} + \dots + \omega_M^{(n)} \$_M^{(n)}, \quad (1)$$

где  $1 \leq n \leq N$ .

Рассмотрим два способа решения уравнения (1). Первый способ: *прямая задача*, когда известны значения входных вращений в шарнирах и требуется определить вращение  $\hat{\$}$  исполнительного органа. Второй способ: *обратная задача*, когда поворот  $\hat{\$}$  считается известным и требуется определить значения входных вращений в шарнирах.

## Решение прямой задачи

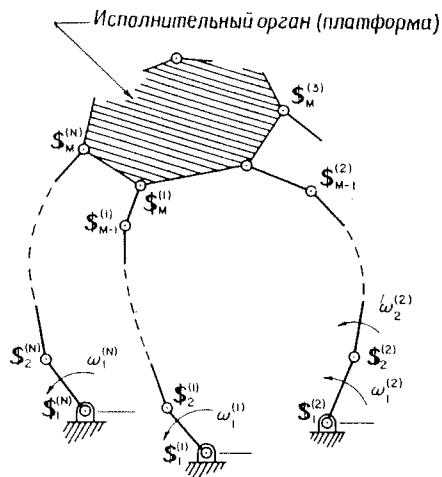
Для решения прямой задачи обозначим  $M$  заданных входных воздействий через  $\omega_m^i$ , где  $m = 1, 2, \dots, g$ ,  $g = M/N$  и  $i = 1, 2, \dots, N$ . В каждой из параллельных цепочек существует  $(M - g)$  неизвестных скалярных коэффициентов  $\omega_j^{(i)}$ , причем  $J = (g + 1), (g + 2), \dots, M$  и задача состоит в том, чтобы исключить эти  $(M - g)$  неизвестных коэффициентов. Это достигается за счет образования  $g$  винтов, каждый из которых ортогонален всем остальным винтам в рассмат-

Уравнение (2) будем называть *характеристическим матричным уравнением для устройства с полностью параллельным расположением приводов*. Если диагональная матрица правой части уравнения (2) вырождена, то уравнение (2) можно преобразовать к следующему виду:

$$\begin{Bmatrix} \omega_1^{(1)} \\ \omega_2^{(1)} \\ \vdots \\ \omega_g^{(1)} \\ \omega_1^{(2)} \\ \omega_2^{(2)} \\ \vdots \\ \omega_g^{(2)} \\ \vdots \\ \omega_g^{(N)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\$_1^{(1)} \cdot \$_{o1}^{(1)}} \$_{o1}^{(1)T} \\ \frac{1}{\$_2^{(1)} \cdot \$_{o2}^{(1)}} \$_{o2}^{(1)T} \\ \vdots \\ \frac{1}{\$_g^{(1)} \cdot \$_{og}^{(1)}} \$_{og}^{(1)T} \\ \frac{1}{\$_1^{(2)} \cdot \$_{o1}^{(2)}} \$_{o1}^{(2)T} \\ \vdots \\ \frac{1}{\$_g^{(2)} \cdot \$_{og}^{(2)}} \$_{og}^{(2)T} \\ \vdots \\ \frac{1}{\$_g^{(N)} \cdot \$_{og}^{(N)}} \$_{og}^{(N)T} \end{bmatrix} (\hat{\$}). \quad (3)^*$$

Далее, так как квадратная матрица в правой части уравнения (3) в общем случае неоднородна (т. е. устройство не находится в особой конфи-

\* Для любых двух векторов-столбцов  $\theta_1$  и  $\theta_2$   $\theta_1 \cdot \theta_2 \equiv \{0_1\}^T \{0_2\}$ .



Фиг. 1.

гурации), то (3) можно записать в виде

$$\dot{\$} = [R]\{\omega\}, \quad (4)$$

где  $\{\omega\}$  — вектор-столбец размерностью  $[M \times 1]$ , представляющий собой известные значения задаваемых входных воздействий

$$\{\omega\} = [\omega_1^{(1)} \omega_2^{(1)} \dots \omega_g^{(1)} \omega_1^{(2)} \dots \omega_g^{(N)}], \quad (5)$$

а  $[R]$  — квадратная матрица размерностью  $[M \times M]$ , зависящая только от положения

$$[R] = [R_1 R_2 R_3 \dots R_M], \quad (6)$$

где  $R_j$  — вектор-столбец размерности  $[M \times 1]$ .

Раскрывая уравнение (4), определим значение величины  $\dot{\$}$ , описывающей мгновенное перемещение исполнительного органа

$$\begin{aligned} \dot{\$} = \omega \dot{\$} = & (\omega_1^{(1)} R_1 + \omega_2^{(1)} R_2 + \dots + \omega_g^{(1)} R_g) + \\ & + (\omega_1^{(2)} R_{g+1} + \dots + \omega_g^{(2)} R_{2g}) + \\ & \dots + (\omega_1^{(N)} R_{[1+g(N-1)]} + \dots + \omega_g^{(N)} R_M). \end{aligned} \quad (7)$$

Дальнейшее исследование уравнения (7) позволяет получить запись этого выражения в другом виде. Рассмотрим более подробно другие важные результаты, полученные в настоящей работе.

## Понятие разделенных винтов

Предположим теперь, что все приводы заперты, кроме одного, связанного с первым шарниром в основании первой из параллельных цепочек, т. е.  $\omega_2^{(1)} = \omega_3^{(1)} = \dots = \omega_g^{(1)} = 0$  и  $\omega_1^{(i)} = \dots = \omega_g^{(i)} = 0$  при  $i = 2, 3, \dots, N$ . Мгновенное перемещение исполнительного органа происходит только вследствие поворота в одном шарнире  $\omega_1^{(1)} \dot{\$}_1^{(1)}$ . Обозначим этот отдельный поворот через  $\dot{\$}_{p1}^{(1)}$  ( $= \omega_{p1}^{(1)} \dot{\$}_1^{(1)}$ ). Уравнение (7) преобразуется в следующем виде:

$$\dot{\$}_{p1}^{(1)} = \omega_{p1}^{(1)} \dot{\$}_1^{(1)} = \omega_1^{(1)} R_1. \quad (8)$$

В общем случае отдельный поворот, выражающийся в мгновенном перемещении исполнительного органа и происходящий благодаря входному воздействию  $\omega_m^{(i)} \dot{\$}_m^{(i)}$  при  $i = 1, 2, \dots, N$  и

$m = 1, 2, \dots, g$ , может быть выражен в следующем виде:

$$\dot{\$}_{pm}^{(i)} = \omega_{pm}^{(i)} \dot{\$}_m^{(i)} = \omega_m^{(i)} R_{[m+g(i-1)]}. \quad (9)$$

Используя это выражение, преобразуем уравнение (7) к виду

$$\begin{aligned} \dot{\$} = \omega \dot{\$} = & (\dot{\$}_{p1}^{(1)} + \dot{\$}_{p2}^{(1)} + \dots + \dot{\$}_{pg}^{(1)}) + \\ & + (\dot{\$}_{p1}^{(2)} + \dot{\$}_{p2}^{(2)} + \dots + \dot{\$}_{pg}^{(2)}) + \\ & \dots + (\dot{\$}_{p1}^{(N)} + \dot{\$}_{p2}^{(N)} + \dots + \dot{\$}_{pg}^{(N)}). \end{aligned} \quad (10)$$

Окончательно уравнение (10) можно записать в сжатой форме

$$\dot{\$} = \omega \dot{\$} = \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^g \dot{\$}_{pm}^{(i)}. \quad (11)$$

Следовательно, поворот  $\dot{\$}$ , соответствующий мгновенному перемещению исполнительного органа, равен сумме всех  $(M)$  отдельных поворотов.

Очевидно, что полученные здесь результаты полностью согласуются с результатами работы [1]. Однако доказательство, предложенное нами, требует меньше алгебраических преобразований и вычислений. Кроме того, используя уравнение (2), можно значительно проще, чем в [1], объяснить существование особых конфигураций для устройств с параллельным расположением приводов [8].

## Решение обратной задачи

Как только что было доказано, поворот, соответствующий мгновенному перемещению исполнительного органа, выражается линейной комбинацией поворотов в шарнирах в любой из параллельных цепочек [см. уравнение (1)]. Теперь требуется определить  $g$  входных воздействий в каждой из параллельных цепочек. Результат получаем из уравнения (3), где каждое из неизвестных входных воздействий можно подсчитать по формуле

$$\omega_m^{(i)} = \frac{\dot{\$}_m^{(i)} \dot{\$}_{om}^{(i)}}{\dot{\$}_m^{(i)} \dot{\$}_{om}^{(i)}}, \quad (12)$$

где  $i = 1, 2, \dots, N$ ,  $m = 1, 2, \dots, g$  и  $\dot{\$}_{om}^{(i)}$  — винт, ортогональный всем винтам (кроме винта  $\dot{\$}_m^{(i)}$ ) в  $i$ -й параллельной цепочке.

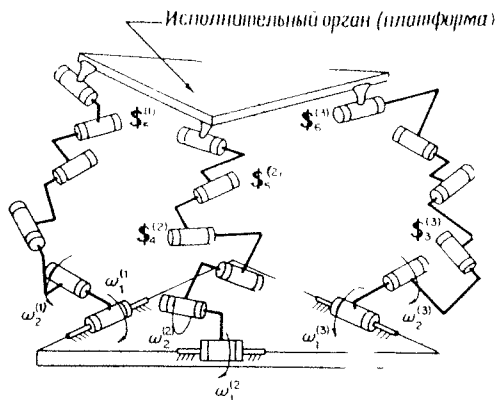
## Пример

Рассмотрим устройство (фиг. 2) с полностью параллельным расположением приводов, имеющее 6 степеней свободы ( $M = 6$ ) и три связывающие параллельные цепочки ( $N = 3$ ). В каждой из параллельных цепочек находятся два управляющих привода,  $g = (M/N) = 2$ . Предположим, что каждая пара этих приводов связана с первыми двумя шарнирами, считая от основания. Уравнение вращения (1) будет выглядеть следующим образом:

$$\dot{\$} = \omega \dot{\$} = \omega_1^{(i)} \dot{\$}_1^{(i)} + \omega_2^{(i)} \dot{\$}_2^{(i)} + \dots + \omega_6^{(i)} \dot{\$}_6^{(i)}, \quad (13)$$

где  $i = 1, 2$  или 3.

При решении прямой задачи задается шесть входных воздействий  $\omega_1^{(1)}, \omega_2^{(1)}, \omega_1^{(2)}, \omega_2^{(2)}, \omega_1^{(3)}, \omega_2^{(3)}$ ,



Фиг. 2.

$\omega_2^{(3)}$  и необходимо определить по четыре ( $M - g = 4$ ) неизвестных скалярных коэффициента для каждой из параллельных цепочек  $\omega_3^{(i)}$ ,  $\omega_4^{(i)}$ ,  $\omega_5^{(i)}$ ,  $\omega_6^{(i)}$ . Уравнение (3) запишется следующим образом:

$$\begin{Bmatrix} \omega_1^{(1)} \\ \omega_2^{(1)} \\ \omega_1^{(2)} \\ \omega_2^{(2)} \\ \omega_1^{(3)} \\ \omega_2^{(3)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{\mathbf{s}_1^{(1)} \cdot \mathbf{s}_{o1}^{(1)}} \mathbf{s}_{o1}^{(1)T} \\ \frac{1}{\mathbf{s}_2^{(1)} \cdot \mathbf{s}_{o2}^{(1)}} \mathbf{s}_{o2}^{(1)T} \\ \frac{1}{\mathbf{s}_1^{(2)} \cdot \mathbf{s}_{o1}^{(2)}} \mathbf{s}_{o1}^{(2)T} \\ \frac{1}{\mathbf{s}_2^{(2)} \cdot \mathbf{s}_{o2}^{(2)}} \mathbf{s}_{o2}^{(2)T} \\ \frac{1}{\mathbf{s}_1^{(3)} \cdot \mathbf{s}_{o1}^{(3)}} \mathbf{s}_{o1}^{(3)T} \\ \frac{1}{\mathbf{s}_2^{(3)} \cdot \mathbf{s}_{o2}^{(3)}} \mathbf{s}_{o2}^{(3)T} \end{Bmatrix} \{\hat{\mathbf{s}}\}. \quad (14)$$

Поворот  $\hat{\mathbf{s}}$ , соответствующий мгновенному перемещению исполнительного органа, можно представить в следующем виде:

$$\hat{\mathbf{s}} = \omega \mathbf{s} = (\omega_1^{(1)} \mathbf{R}_1 + \omega_2^{(1)} \mathbf{R}_2) + (\omega_1^{(2)} \mathbf{R}_3 + \omega_2^{(2)} \mathbf{R}_4) + (\omega_1^{(3)} \mathbf{R}_5 + \omega_2^{(3)} \mathbf{R}_6) \quad (15)$$

Учитывая условие отдельных поворотов, преобразуем уравнение (15):

$$\hat{\mathbf{s}} = \omega \mathbf{s} = \sum_{i=1}^3 \sum_{m=1}^2 \hat{\mathbf{s}}_{pm}^{(i)}. \quad (16)$$

Уравнение (16) можно получить и как частный случай уравнения (11) при  $N = 3$  и  $g = 2$ . Это означает, что поворот  $\hat{\mathbf{s}}$ , представляющий собой мгновенное перемещение исполнительного органа, равен сумме всех шести отдельных поворотов.

При решении обратной задачи, когда известен результирующий поворот  $\hat{\mathbf{s}}$ , шесть неизвестных входных воздействий  $\omega_1^{(i)}$  и  $\omega_2^{(i)}$  можно определить из уравнения (12) при  $m = 1, 2$  и  $i = 1, 2, 3$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Mohamed M. G., Sanger J., and Duffy J., «Instantaneous Kinematics of Fully-Parallel Devices», *Sixth IFToMM Congress on Theory of Machines and Mechanisms*, New Delhi, Dec. 15—20, 1983.
2. Mohamed M. G., «Instantaneous Kinematics and Joint Displacement Analysis of Fully-Parallel Robotic Devices», Ph. D. dissertation, University of Florida, Gainesville, FL, 1983.
3. Hunt K. H., «Structural Kinematics of In-Parallel-Actuated Robot-Arms», ASME Paper No. 82-DET-105, Presented at 17th Mechanisms Conference, Arlington, VA, Sept. 12—15, 1982.
4. Waldron K. J., «The Constraint Analysis of Mechanisms», *Journal of Mechanisms*, Vol. 2, 1966, pp. 101—114.
5. Davies T. H., and Primrose E. J. F., «An Algebra for the Screw Systems of a Pair of Bodies in a Kinematic Chain», *Proceedings of the Third World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms*, Kupari, Yugoslavia, Paper D-14, 1971, pp. 199—212.
6. Baker J. E., «On Relative Freedom Between Links in Kinematic Chains with Cross-Jointing», *Mechanisms and Machine Theory*, Vol. 15, 1980, pp. 397—413.
7. Davies T. H., «Kirchoff's Circulation Law Applied to Mutli-Loop Kinematic Chains», *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 16, 1981, pp. 171—183.
8. Mohamed M. G., and Duffy J., «On Special Configurations of Parallel Devices», in preparation for publication.