Окончательная формула для расчета интенсивности изнашивания, которая может быть использована для оценки ожидаемого износа втулки, имеет вид

$$I_р = 0{,}54 \cdot 10^{-6} \left[\frac{(R_p R_a)^{0,5} W_p S_{mw}}{S_m H_p} \left(\frac{P}{H_{\mu 0}}\right)^{0,5} \right]^{0,25} U.$$

Расчетная средняя интенсивность изнашивания втулки $I_р = 0{,}92 \cdot 10^{-9}$; погрешность составляет 2%.

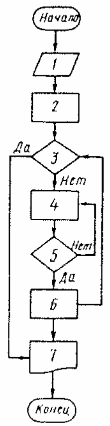
Используя полученную модель, можно решить задачу локальной оптимизации величины I относительно ПКПС. Искомыми параметрами является множество ПКПС одной из деталей узла трения, заданными — множество эксплуатационных параметров сопряжения. Целевая функция задается отношением r_4 [см. выражение (5)] для некоторого случая износа. Таким образом, в общем виде задачу оптимизации можно выразить как

$$f(P, A, v, \eta, HB_{1,2}, \rho_{1,2}, Q) \to \mathrm{opt} \qquad (6)$$

при наборе ограничений вида $\min \le q_i \in Q \le \max$.

При оптимизации предложенной модели изнашивания решается одна из двух задач: минимизация целевой функции при заданных ограничениях либо приведение ее к конкретному значению (оптимуму), которое определяется требованиями, предъявляемыми к узлу (срок службы, допустимое значение износа деталей и т.д.). В первом случае opt = 0, во втором opt = const. При этом искомая совокупность ПКПС рассматривается как вектор восьмимерного пространства, координаты которого соответствуют значениям отдельных параметров.

На рисунке представлен алгоритм оптимизации, выработанный на основе метода случайных направлений решения задач нелинейного программирования. Алгоритм выполняется следующим образом.



Алгоритм оптимизации модели изнашивания детали узла трения

1. Ввод исходных данных, описывающих исследуемое сопряжение (значения параметров эксплуатации, вид целевой функции, система ограничений ПКПС), назначаемый оптимум, степень ε точности решения.

2. Случайная точка Q_0, удовлетворяющая условию (6), принимается за начальное приближение. По заданной в блоке *1* зависимости вычисляется значение целевой функции в этой точке $f(Q_0)$.

3. Если при этом в точке Q_0 достигается оптимум с заданной точностью, а именно $|f(Q_0) - \mathrm{opt}| \le \varepsilon$, то она является точкой оптимума задачи при заданных условиях, и вычисления прекращаются (переход по ветви «Да» в блок *7*).

4. В противном случае (ветвь «Нет») путем последовательного перебора в блоке *4* осуществляется поиск элементарного (шагового) приращения Δ аргументов из множества возможных, обеспечивающего максимальное приближение целевой функции к оптимуму. А именно, по начальному приближению Q_0 строится вектор, координаты которого определяются точкой $Q_1 = Q_0 + \Delta$, и вычисляется новое значение целевой функции $f(Q_1)$.

5. Если точка Q_1 не находится близко к искомой оптимальной, т.е. $|f(Q_0) - \mathrm{opt}| - |f(Q_1) - \mathrm{opt}| \le 0$ (ветвь «Нет» блока *5*), то рассматривается следующий вариант Q_1 (блок *4*).

6. В противном случае (ветвь «Да») в блоке *6* осуществляется переопределение переменных: $f(Q_0) = f(Q_1)$; $Q_0 = Q_1$ и проверяется на оптимальность новая точка Q_0 (блок *3*). Далее реализуется следующая итерация алгоритма.

7. Вывод на печать результатов расчета.

В результате оптимизации модели изнашивания втулки для достижения заданного значения $I = 0{,}98 \cdot 10^{-9}$ получены следующие значения ПКПС и I (в скобках приведены опытные данные): $R_a = 0{,}16$ (0,09) мкм; $R_p = 0{,}32$ (0,28) мкм; $S_m = 0{,}08$ (0,033) мм; $W_p = 2{,}5$ (8,0) мкм; $S_{mw} = 3{,}2$ (6,4) мм; $H_{\mu 0} = 2900$ (2920) МПа; $I = 0{,}978 \cdot 10^{-9}$ ($0{,}98 \cdot 10^{-9}$). При этом границы допустимых значений ПКПС соответствуют рассматриваемым в работе [4].

Таким образом, предложенная математическая модель изнашивания деталей узлов трения и методика ее оптимизации позволяют не только оценивать ожидаемый износ конкретного сопряжения, но и обоснованно назначать ПКПС, требуемые для обеспечения его износостойкости.

Список литературы

1. **Улашкин А.П.** Выбор отделочно-упрочняющих методов обработки (для повышения износостойкости деталей машин). — Хабаровск: ХГТУ, 1998. — 103 с.

2. **Браун Э.Д., Евдокимов Ю.А., Чичинадзе А.В.** Моделирование трения и изнашивания в машинах. — М.: Машиностроение, 1982. — 191 с.

3. **Пистунов И.Н.** Оптимальный выбор масштабных коэффициентов перехода // Трение и износ — 1994. — Т. 15. — №3. — С. 435—441.

4. **Фролов Е.Н., Калашников В.Г., Горленко О.А.** Повышение долговечности деталей узлов трения скольжения рулевого управления автогрейдера ДЗ-143 // Проблемы повышения надежности и долговечности деталей машин и инструментов: Сб. науч. трудов / Под ред. А.Г. Суслова. — Брянск: БИТМ, 1992. — С. 11—21.

АВТОМАТИЗАЦИЯ ПРОИЗВОДСТВА

Оптимизация конструктивных параметров оборудования типа гексапода

И.Г. Хольшев, В.В. Бушуев

В последнее время в мировом станкостроении активно развивается оборудование типа гексапода, основанное на принципе параллельной кинематической структуры [1]. Его применение наиболее эффективно при обработке изделий сложной формы (например, штампов), когда требуется перемещение инструмента по пяти-шести координатам.

Оптимизация параметров станков-гексаподов может осуществляться по разным критериям. Если, например, рассматривать оптимизацию по критерию занимаемой площади, то целесообразно ввести коэффициент эффективности $k_{эф} = S_г/S_{РП}$, где $S_г = L \times B$ — площадь, соответствующая габариту станка (L и B — его длина и ширина); $S_{РП} = l \times b$ — площадь сечения рабочего пространства (l и b — длина и ширина).

Значения коэффициента $k_{эф}$ для оборудования различных фирм приведены в таблице, откуда следует, что имеется тенденция его уменьшения с течением времени. Это свидетельствует о совершенствовании оборудования и связано, по-видимому, с использованием компьютерного моделирования при проектировании и с оптимизацией конструктивных параметров.

Изготовитель	Модель	Год изготовления	Габарит в плане		Размеры рабочего пространства, $l \times b$, мм	$k_{эф}$
			$L \times B$, мм	$S_г$, м²		
Новосибирский электротехнический институт	—	1987	2000×2200	—	250×250	70,40
Ingersoll (США)	VOH 1000	1992	4900×4500	—	1000×1000	22,05
Hexel (США)	Tornado 2000	1992	—	6	600×600	16,67
Fraunhofer (Германия)	Mikromat 6X	1995	—	9	630×630	22,67
АО "Лапик" (Россия)	TM 500	1995	1780×1280	—	500×350	13,02
Ingersoll	HOH 600	1997	3400×3000	—	600×600	28,33
Geodetic (Швейцария)	GPM 1000	1997	2100×2100	—	650×650	10,44
Geodetic	GPM 4000	1997	3000×3000	—	1000×1000	9,00

Необходимо отметить, что объем рабочего пространства гексаподов в технических характеристиках обозначают в виде куба, хотя реально это пространство имеет сложную конфигурацию и его объем больше, чем указано в проспектах.

Для решения задачи оптимизации в данном случае необходимо варьировать геометрические параметры элементов конструкции гексапода и положение платформы, находя путем моделиро-

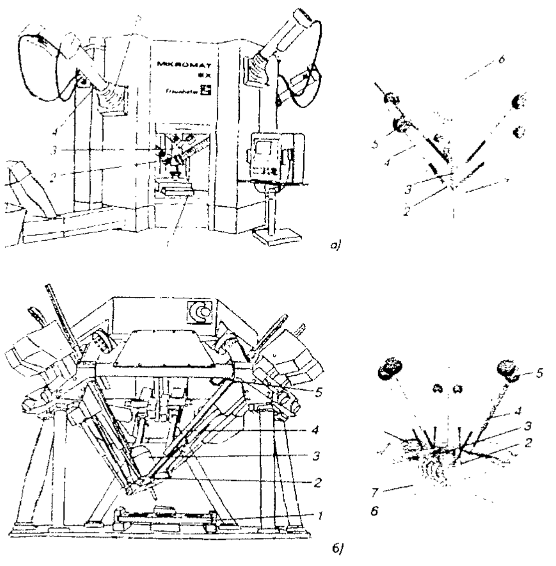


Рис. 1. Общий вид (слева) и графическая модель (справа) гексаподов мод. Mikromat 6X института Fraunhofer (*а*) и мод. ТМ 500 АО «Лапик» (*б*): *1* — стол; *2* — шарнир, связанный с платформой; *3* — шпиндель; *4* — штанга; *5* — шарнир, связанный с основанием; *6* — объем рабочего пространства, ограниченный максимальным вылетом штанг; *7* — то же — минимальным

вания для каждого сочетания варьируемых параметров определенный критерий, например объем рабочего пространства.

Рассмотрим принципы оптимизации на двух примерах гексаподов (рис.1), причем для гексапода мод. Mikromat 6X (см. рис.1, *а*) известны точные размеры, а для гексапода мод. ТМ 500 (см. рис.1, *б*) размеры установлены по фотографии и техническим характеристикам (это подтверждает возможность проводить оптимизацию на самой ранней стадии проектирования, когда имеются лишь схемы, эскизы и другая предварительная документация).

Конструктивное различие этих моделей заключается в расположении шарниров и геометрических размерах. У мод. Mikromat 6X из шести шарниров, связанных с платформой, три расположены в одной плоскости, а еще три — в другой плоскости, параллельной ей; шарниры, связанные с основанием, также расположены в двух параллельных плоскостях. У мод. ТМ 500 все шарниры платформы расположены в одной плоскости, так же как шарниры основания.

Исходной информацией при анализе является положение шпинделя (рис.2), соответствующее положению платформы, и конструктивные параметры штанги, платформы и основания. Так, согласно рис.2 положение оси шпинделя в его собственной системе координат $X_{шп}Y_{шп}Z_{шп}$ определяется углами α, β и γ, а сама эта система координат располагается определенным образом относительно абсолютной системы *XYZ*.

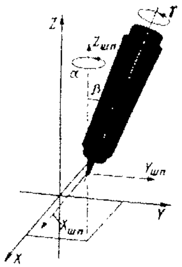


Рис.2. Система координат для определения положения оси шпинделя в пространстве

Конструктивными элементами штанги (рис. 3) являются шарниры *1* и *4*, связанные соответственно с платформой и основанием, а также цилиндр *3* со штоком *2*. В ее конструктивные параметры входят радиус $R_ц$ цилиндра, радиус $R_{шт}$ штока, основная $L_{шт}$ и дополнительная $L_{доп}$ длина штока, длина $L_н$ направляющей штока, расстояние $H_т$ от торца штока до оси шарнира, связанного с основанием, а также перемещение $L_ш$ штанги.

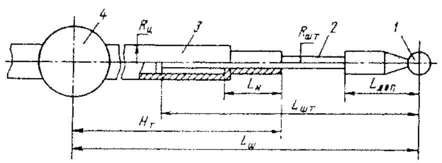


Рис.3. Конструктивные параметры штанги

Для платформы (рис. 4) выделим следующие конструктивные параметры: радиус $R_п$ окружности центров нижних шарниров *2*; разницу $\Delta R_п$ радиусов окружностей центров нижних и верхних (*1*) шарниров; расстояние $H_п$ от центров нижних шарниров до основания шпинделя *3*; разницу $\Delta H_п$ в расположении верхних и нижних шарниров по длине шпинделя; разницу $\Delta\omega_п$ углового положения верхних и нижних шарниров; радиус $R_{шп}$ и длину $H_{шп}$ шпинделя; радиус $R_и$ и длину $H_и$ инструмента, установленного в шпинделе.

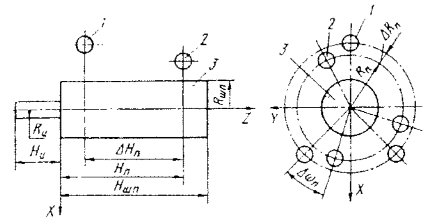


Рис.4. Конструктивные параметры платформы

Конструктивными параметрами основания (рис.5) являются: радиус $R_о$ окружности центров нижних шарниров *5*; разница $\Delta R_о$ радиусов окружностей центров нижних и верхних (*3*) шарниров; высота $H_о$ верхних шарниров в абсолютной системе координат *XYZ*; разница $\Delta H_о$ высот верхних и нижних шарниров; разница $\Delta\omega_о$ углового положения верхних и нижних шарниров. Рабочее пространство (РП) характеризуется радиусом описанной окружности $R_{РП} = \sqrt{l^2 + b^2} / 2$ и высотой $H_{РП}$.

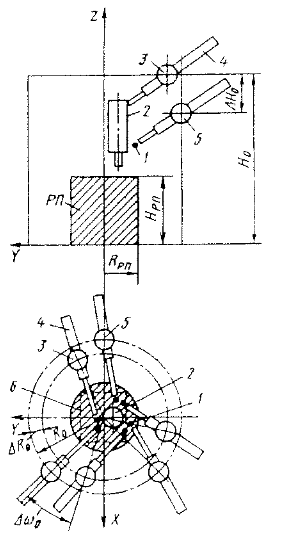


Рис.5. Конструктивные параметры основания и размеры рабочего пространства: *1* — шарнир, связанный с платформой; *2* — шпиндель; *3* и *5* — соответственно верхний и нижний шарниры, связанные с основанием; *4* — штанга; *6* — контур рабочего пространства, соответствующий технической характеристике

Оптимизация конструктивных параметров гексапода (при заданном объеме рабочего пространства) заключается в изменении расположения шарниров на платформе и основании при постоянных конструктивных параметрах штанги. Для простоты решения рассматриваем относительные конструктивные параметры, полученные путем деления соответствующих размеров на $L_ш$. Значения таких параметров для двух моделей гексаподов приведены ниже.

Модель	Mikromat 6X	TM 500
$R_о$	1,340	0,980
$\Delta R_о$	0,000	0,000
$H_о$	2,010	1,745
$\Delta H_о$	0,500	0,000
$R_{РП}$	0,445	0,608
$H_{РП}$	0,630	0,637
$R_п$	0,200	0,314
$\Delta R_п$	0,000	0,000
$H_п$	0,450	0,039
$\Delta H_п$	0,400	0,000
$R_{шп}$	0,100	0,137
$H_{шп}$	0,750	0,392
$R_ц$	0,050	0,039
$H_т$	0,950	0,922
$L_ш$	1,000	1,000
$L_н$	0,250	0,020
$R_{шт}$	0,040	0,020
$L_{шт}$	1,400	1,098
$L_{доп}$	0,150	0,020

Сложная форма рабочего пространства гексаподов (см. рис. 1) затрудняет оптимизацию их конструктивных параметров. Размеры и форма поверхности, ограничивающей рабочее пространство, зависят от максимального и минимального вылета штанг, от максимального угла наклона шарниров и от коллизии конструктивных элементов. Под коллизией понимается, например такое явление, когда при значительном угле наклона платформы возможно столкновение шпинделя со штангой или одной штанги с другой, что ограничивает перемещение шпинделя, несущего инструмент. Форма рабочего пространства зависит от конструкции элементов гексапода и от углового положения платформы в пространстве. Для упрощения расчетов и уменьшения числа комбинаций положения элементов при оптимизации конструктивных параметров не будем учитывать зависимость границы рабочего пространства от конструктивных параметров и угла наклона шарниров.

Для наглядности графического изображения формы рабочего пространства рассмотрим его сечение плоскостью, параллельной плоскости XY (рис.6). На плоскости сечения покажем два вида границ рабочего пространства: заданную в виде окружности радиуса $R_{РП}$, определяющей условный цилиндр $РП$ радиусом $R_{РП}$ и высотой $H_{РП}$, и реальную границу перемещения платформы, представляющую собой фигуру сложной формы. Изменяя положение платформы по оси Z, формируем реальное рабочее пространство. Для оптимизации конструктивных параметров вводим критерий не по границе перемещения платформы, а по окружности 2 (радиусом R), вписанной в контур границы и имеющей центр в точке A, представляющей собой проекцию начала координат на плоскость сечения, параллельную плоскости XY (на рис. 6, *а* показано сечение при $z = 630$ мм, на рис. 6, *б* — при $z = 445$ мм).

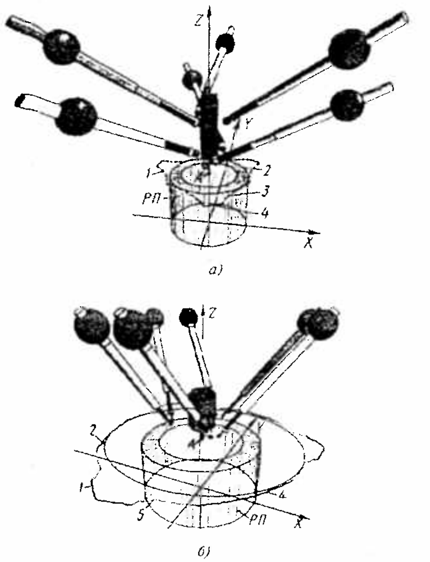


Рис. 6. Графическое изображение границы перемещения платформы на плоскости для гексаподов моделей Mikromat 6X (*а*) и ТМ 500 (*б*): *1* — реальная граница перемещения; *2* — окружность, вписанная в контур границы; *3* — кривая, определяемая минимальным вылетом штанги; *4* — то же максимальным; *5* — кривая, определяемая коллизией элементов; *РП* — цилиндр рабочего пространства

При соизмеримых значениях относительной высоты $H_{РП}$ рабочего пространства его относительный радиус $R_{РП}$ у гексапода мод. ТМ 500 больше, чем у мод. Mikromat 6X, хотя у последнего больше габаритные размеры, определяемые в основном размерами $R_о$ и $H_о$. Это связано с различным соотношением конструктивных параметров $R_о$, $H_о$, $R_п$, $H_п$, $L_{шт}$.

Как видно из рис. 6, площадь, ограниченная контуром *2*, значительно меньше, чем площадь, ограниченная контуром *1*. Отсюда следует, что на металлообрабатывающих станках-гексаподах заготовку целесообразно устанавливать не в геометрическом центре стола, а с учетом фактического расположения рабочего пространства, определяемого путем предварительного расчета на компьютере.

Объем рабочего пространства зависит также от угла β ориентации шпинделя (см. рис.2), т.е. от наклона платформы. Для исследования этой зависимости используем два подхода: изменение конструктивных параметров оборудования и изменение угла γ (см. рис.2), что позволяет заметно снизить влияние коллизии, вследствие которой значительно уменьшается область перемещения платформы.

Была исследована зависимость радиуса R окружности *2* (см. рис. 6) от конструктивных параметров $R_о$, $H_о$, $R_п$, $H_п$ и $H_т$ для гексапода мод. ТМ 500 при изменении угла β. Установлено, что для уменьшения влияния коллизии целесообразно уменьшить размер $H_т$ или увеличить $R_о$; в то же время, поскольку при уменьшении размера $H_т$ происходит смещение рабочего пространства, следует уменьшить размер $H_о$. Результаты оптимизации представлены ниже (в числителе — исходные значения, в знаменателе — оптимизированные).

$R_о$	0,980/0,706		
$H_о$	1,745/1,451	$R_п$	0,314/0,392
$R_{РП}$	0,608/0,608	$H_п$	0,039/0,039
$H_{РП}$	0,637/0,637	$H_т$	9,22/0,588

Как видно, в результате оптимизации размеры $R_о$ и $H_о$ сократились; при этом размеры реального рабочего пространства не претерпели существенных изменений.

Аналогичные исследования для гексапода мод. Mikromat 6X показали, что для увеличения объема рабочего пространства рекомендуется увеличить радиус $R_п$ или уменьшить радиус $R_о$. Но коллизия элементов значительно ограничивает объем рабочего пространства. Поэтому на основе трехмерной компьютерной визуализации было принято решение об изменении конструктивных параметров $\Delta R_о$ и $\Delta R_п$. Результаты оптимизации представлены ниже (в числителе — исходные значения, в знаменателе — оптимизированные).

$R_о$	1,340/1,063	$\Delta R_п$	0,000/0,100
$\Delta R_о$	0,000/0,100	$H_п$	0,450/0,450
$H_о$	2,010/1,763	$\Delta H_п$	0,400/0,400
$\Delta H_о$	0,500/0,350	$H_т$	0,950/0,700
$R_п$	0,200/0,300	$L_{шт}$	1,400/1,400

Здесь также достигнуто уменьшение размеров $R_о$ и $H_о$ при некотором увеличении размеров рабочего пространства.

Установлено также, что при увеличении угла β наклона платформы от 0° до 40° размеры рабочего пространства уменьшаются (рис.7) и оно меняет свое положение относительно центра стола. Это обстоятельство следует учитывать при планировании траектории перемещения платформы и определении места установки заготовки.

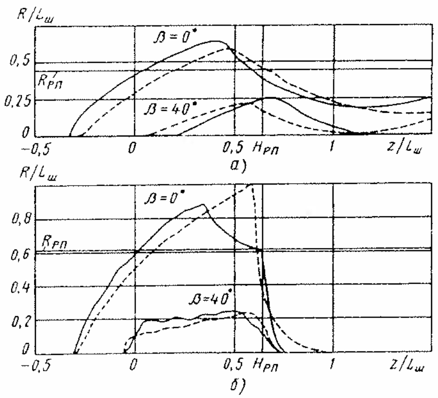


Рис.7. Зависимость размеров рабочего пространства гексаподов моделей Mikromat 6X (*а*) и ТМ 500 (*б*) от положения платформы по оси Z и угла β ее наклона: штриховые линии — исходные данные, сплошные — оптимизированные

Варьируя угол γ (см. рис.2), можно уменьшить влияние коллизии элементов на размеры рабочего пространства. Компьютерные исследования позволили определить оптимальные значения γ, которые составляют −10° для мод. Mikromat 6X и 15° для мод. ТМ 500.

Отметим еще одну характерную особенность оборудования параллельной структуры. Внутри рабочего пространства могут возникать зоны потери жесткости, что приводит к резкому ухудшению работоспособности оборудования. Например, плоский механизм (рис.8) может находиться в двух положениях. В обычном положении (см. рис. 8, *а*) кинематическая структура имеет две степени подвижности при изменении вылета штанги. В особом положении (см. рис. 8, *б*) плоская кинематическая структура превращается в линейную, когда при действии на шарнир силы F происходит скачкообразный переход из одного положения в другое. Вследствие этого перемещение рабочего органа внутри рабочего пространства ограничивается. Расчет зон потери жесткости основан на анализе матрицы Якоби [2] при равенстве нулю ее определителя.

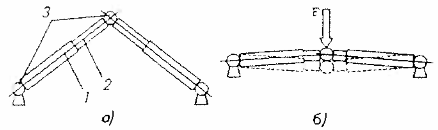


Рис.8. Схема потери жесткости плоским механизмом (*1* — штанга; *2* — шток; *3* — шарниры)

Выводы

1. Проектирование станков-гексаподов должно осуществляться при широком использовании компьютера. Только в этом случае можно определить фактический объем рабочего пространства, избежать коллизий, связанных со столкновением элементов, и выбрать оптимальные геометрические параметры станков.

2. Для проектирования станков-гексаподов необходимо разработать критерии оптимизации, учитывающие как геометрические, так и иные параметры (жесткость, точность и т.д.).

3. Поиск оптимизированных параметров должен быть основан не только на хороших знаниях и интуиции проектировщика, но и на использовании современных программных продуктов, позволяющих осуществлять трехмерную графическую визуализацию.

4. Объем рабочего пространства гексаподов имеет сложную пространственную форму. Его границы зависят от максимального и минимального вылета штанг, от коллизии элементов и от конструкции шарниров (в данной статье не рассмотрено), а форма рабочего пространства определяется конструктивными параметрами гексапода и положением платформы в пространстве.

5. Расположение заготовки на столе гексапода следует определять с учетом изменения положения рабочего пространства, для чего необходимо производить предварительный расчет на компьютере.

Список литературы

1. **Бушуев В.В., Хольшев И.Г.** Механизмы параллельной структуры в машиностроении // СТИН. — 2001. — №1. — С. 3—8.

2. **Справочник** по промышленной робототехнике. — В 2 т. / Под ред. Ш. Нофа. — М.: Машиностроение, 1998 — Т.1 — 479 с.

Учет трения в задаче о движении манипулятора с «развязкой движений» и силовым натяжением передач

А.Г. Овакимов

Решение задачи дано на примере модуля (рис.1) манипулятора мод. РМП-25 [1 и 2] с тремя степенями подвижности, представляющего собой сложную систему дифференциальных передач с натяжным устройством для устранения зазоров в передачах. В работе [3] приведено решение задачи о движении той же системы в отсутствие трения. В данной статье для расчета сил трения и последующего их учета в уравнениях движения системы исследуются силовые потоки, обусловленные воздействием натяжного устройства, внешней нагрузки, а также сил инерции.

1. **Выделим в рассматриваемом модуле три части.** Первая — *манипулятор*, состоящий из корпуса *0*, трех подвижных звеньев *I*, *II*, *III* и трех вращательных кинематических пар $П_k$($П_1$, $П_2$, $П_3$). Углы $\varphi_{k,k-1}$ (φ_{10}, φ_{21}, φ_{32}) относительного поворота звеньев манипулятора (здесь индексы 0 и 1—3 соответствуют корпусу и звеньям *I*—*III*) приняты за обобщенные координаты q_k (q_1, q_2, q_3) системы. Они отрабатываются с помощью передач, образующих три канала: два из них идут от конического колеса на звене *III* до выходных валов *2* и *3*; третий представляет собой выходной вал *1*, которым является само звено *I*. Единичные векторы $\bar{e}_{1,2,3}$ осей пар $П_{1,2,3}$ определяют положительное направление измерения соответствующих углов, угловых скоростей, ускорений и моментов пар сил.

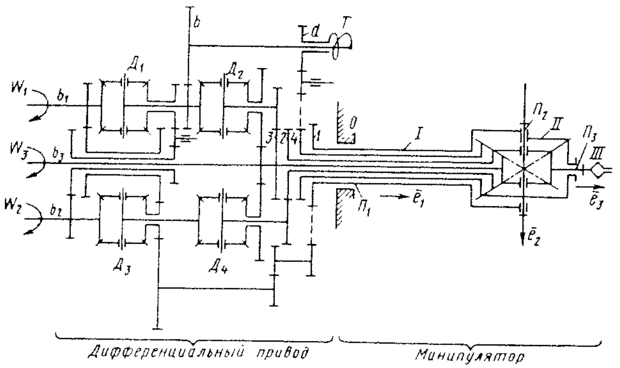


Рис.1. Схема модуля с «развязкой движений» и натяжным устройством

Вторая часть модуля — *дифференциальный привод*, состоящий из дифференциалов $Д_1$ — $Д_4$ и обеспечивающий «развязку движений» [4—6], т.е. независимую отработку относительных поворотов звеньев манипулятора каждым из приводных двигателей через входные валы b_k (b_1, b_2, b_3).

Третья часть модуля — *натяжное устройство* [6], выполненное в виде торсиона *T* с двумя кинематическими ветвями. Первая ветвь соединяет торец *d* торсиона с звеном *II* манипулятора через выходной вал *4*; вторая соединяет торец *b* торсиона с валом водила дифференциала $Д_1$.

Принятая схема дифференциального привода обеспечивает постоянные по величине передаточные отношения $\lambda_k = \Delta q_k / \Delta\beta_k$ между угловыми перемещениями Δq_k в парах $П_k$ и соответствующими перемещениями $\Delta\beta_k$ валов b_k, а именно: $\lambda_1 = -1/8$; $\lambda_2 = 1/12$; $\lambda_3 = -7/44$.

2. **Уравнения движения модуля** при учете сил трения имеют следующий вид:

$$a_{k1}\ddot{q}_1 + a_{k2}\ddot{q}_2 + a_{k3}\ddot{q}_3 + f_k(q, \dot{q}) = Q_k + Q_k^{тр}, \quad (1)$$

где Q_k — обобщенные силы (без учета сил трения), отражающие влияние внешних сил — весов звеньев и приводных моментов W_k (W_1, W_2, W_3) на валах b_k; $Q_k^{тр}$ — обобщенные силы трения; a_{ks} — инерционные коэффициенты ($s = 1,2,3$), являющиеся функциями положения звеньев манипулятора, т.е. вектора $q = (q_1, q_2, q_3)$; $f_k(q, \dot{q})$ — функция, учитывающая не только положение звеньев, но и скорости в системе (вектор $\dot{q}$).

Расчет 3×3-матрицы коэффициентов a_{ks}, функций f_k, а также обобщенных сил Q_k приведен в работе [3].

Определение ускорений $\ddot{q}_k$ осложнено тем, что силы трения и соответственно величины $Q_k^{тр}$ сами в свою очередь зависят от этих ускорений. Действительно, при силовом расчете модуля, необходимом для определения сил трения, следует установить результат совокупного воздействия на элементы модуля не только внешней нагрузки и силового натяжения передач, но и сил инерции системы.

После формирования алгоритма расчета сил $Q_k^{тр}$ искомые ускорения $\dot{q}_k$ могут быть определены методом последовательных приближений [7]. При этом сначала по ранее найденным значениям q_k, $\dot{q}_k$ и $\ddot{q}_k$ для предшествующего момента времени t_{i-1} рассчитаем скорости и положение (координаты) системы в рассматриваемый момент времени $t_i = t_{i-1} + \Delta t$ по формулам

$$\dot{q}_i = \dot{q}_{i-1} + \ddot{q}_{i-1}\Delta t; \; q_i = q_{i-1} + 0{,}5(\dot{q}_{i-1} + \dot{q}_i)\Delta t$$

(здесь индекс *k* опущен для простоты записи).

Для момента времени t_i в качестве начального приближения примем значения ускорений, определенные из системы уравнений (1) при условии, что при расчете сил инерции (необходимом для нахождения начальных значений обобщенных сил трения) было принято $\ddot{q}_k = 0$. Полученные таким образом ускорения используем для расчета новых, более точных значений обобщенных сил трения, а затем и соответствующих ускорений. Итерационный процесс повторяется до тех пор, пока абсолютные значения разностей ускорений в двух смежных циклах расчета не станут достаточно малы.

Момент L_ξ, воспринимаемый любым элементом ξ модуля, будем рассматривать как сумму трех алгебраических величин: $L_\xi = M_\xi^{н} + P_\xi + S_\xi$, где $M_\xi^{н}$ — момент, обусловленный воздействием натяжного устройства; P_ξ — момент, связанный с весами звеньев и приводными моментами W_k; S_ξ — инерционная нагрузка.

В элементе ξ трение может существовать одновременно и во вращательной паре и в зубчатом зацеплении. Примем, что силы трения пропорциональны моменту L_ξ и будем определять их с помощью одного коэффициента K_{12} (он учитывает диаметры колеса, вала и коэффициент трения), в записи которого индексы 1 и 2 соответствуют звеньям вращательной пары. Передаваемый на элемент ξ момент трения

$$M_\xi^{тр} = \mathrm{sgn}(\omega_2 - \omega_1)|L_\xi| K_{12} \quad (2)$$

(где ω_2 и ω_1 — угловые скорости звеньев вращательной пары) противоположен направлению относительной угловой скорости $\omega_{12} = \omega_1 - \omega_2$.

Зная момент L_ξ, можно более точно учесть силы трения; здесь же ограничимся принципиальным решением задачи.

Для расчета обобщенных сил трения

$$Q_k^{тр} = \sum_\xi M_\xi^{тр} \frac{\partial\psi_{12}}{\partial q_k} \quad (3)$$

(где ψ_{12} — относительный угол поворота) нужно создать массивы из частных передаточных отношений $\partial\psi_{12} / \partial q_k$, которые потребуются также для