

**Янг**

(D. C. H. Yang)

University of California, Лос-  
Анджелес, шт. Калифорния**Ли**

T. W. (Lee)

Rutgers University, Нью-  
Брансуик, шт. Нью-Джерси

# Исследование кинематики манипуляторов платформенного типа

(Feasibility Study of a Platform Type of Robotic Manipulators from a Kinematic Viewpoint)

Представлены теоретические исследования возможности реализации платформенных механизмов в манипуляторах. Сначала с привлечением кинематического синтеза исследуется возможность существования кинематически замкнутых цепей такого типа. Затем следующий анализ позиционирования, который с помощью метода матриц размерностью  $4 \times 4$  позволяет через текущие координаты и конструктивные параметры получить уравнения для решения обратной задачи. Исследуются основные кинематические характеристики и ограничения: максимальный диапазон движения и вращения и рабочее пространство.

## 1. Введение

Обычно рука робота представляет собой анатоморфный разомкнутый механизм. Такому типу манипуляторов (по сравнению с кинематически замкнутыми механизмами) свойственны хорошая область достижения, большая рабочая зона, лучшая маневренность. Им, однако, присущи и некоторые недостатки. Конструкции консольного типа, применяемые в разомкнутых манипуляторах, имеют малую жесткость и, следовательно, неудовлетворительные динамические характеристики, особенно при работе на больших скоростях и в условиях выполнения операций по переносу больших масс. Кроме того, за очень небольшим исключением [1], решение обратной задачи управления манипулятором сопряжено со значительными трудностями.

Вероятно, можно было бы прибегнуть к построению манипуляторов по принципу замкнутых кинематических цепей, как это сделано, например, в платформе Стюарта [2] и других конструкциях [3]. Это было бы особенно эффективно в тех случаях, когда имеются большие динамические нагрузки при низких требованиях к величине рабочей зоны и маневренности. Их можно, например, использовать в «интеллектуальных» позиционерах с большим числом степеней подвижности, которые применяются при выполнении столь несложных операций, как прецизионная механическая обработка, сварка и окраска, а также для многих военных целей.

До настоящего времени проведено мало исследований манипуляторов с замкнутыми кинематическими цепями. Платформа Стюарта [2], представляющая собой две пластины, соединенные друг с другом стяжками регулируемой длины, является платформенным механизмом \* с шестью степенями свободы 6-SPS (где S и P обозначают соответственно сферический шарнир и поступательную пару). Платформа Стюарта была первоначально разработана как самолетный имитатор, а

\* Предоставлено на конференцию ASME по конструированию, 11–14 сентября 1983 г., Дирбори, шт. Мичиган; получено редакцией 10 июня 1983 г.

\* В отечественной литературе применяется термин «*L*-координатный модуль». См., например, Колискор А. Ш., «Разработка и исследование промышленных роботов на основе *L*-координат», *Станки и инструменты*, № 12, 1982, с. 21–24.— *Изм. перев.*

затем нашла также применение в металлорежущих станках, имитаторах космических летательных аппаратов, транспортёрах и т. д. Ноэль Хофман и Маккинион [4] попытались смоделировать с помощью таких платформ движение летательного аппарата, применяя готовый программный модуль SAP IV. Маккаллон и Трюонг использовали эту установку как автоматический сборочный стол. Они описали [5] механическую оснастку этой установки и исследовали задачу синтеза траекторий. В своей книге Хант [3] предложил использовать платформу Стюарта как механизм руки робота. Разрабатывая эту идею, Фихтер и Макдоуэлл [6] представили обзор и ряд предварительных конструктивных предложений манипуляторов такого типа. Недавно Хант [7] провел систематическое исследование руки робота с параллельно работающими приводами, где рассмотрел множество возможных случаев применения запараллеленных конструкций, в том числе и платформы Стюарта.

Однако паряду с преимуществами такой класс кинематически замкнутых манипуляторов имеет и целый ряд недостатков, которые необходимо знать, для того чтобы с их учетом разрабатывать методы кинематического синтеза. Поэтому и необходимо ближе познакомиться с механизмами такого класса и разработать ряд рекомендаций по их конструированию и применению. Следовательно, исследование возможности реализации механизмов такого типа с точки зрения их применения как робототехнических модулей не только является важным само по себе, но и представляет практический интерес.

Целью настоящего исследования является разработка аналитических методов и вычислительных процедур, пригодных для анализа основных кинематических характеристик платформенных механизмов (таких, например, как рабочая зона и максимальный диапазон движения). Говоря конкретнее, эти цели можно сформулировать следующим образом: 1) провести кинематический (цифровой) синтез для определения возможности существования одной или нескольких платформенных конструкций, способных выполнять функции модулей в робототехнических устройствах; 2) построить аналитическую модель такого класса механизмов и провести анализ положений, включая вопросы решаемости уравнений обратной задачи; 3) аналитически сформулировать физические ограничения

ния этого механизма (такие, например, как вращаемость стержней и шаровых шарниров); 4) исследовать рабочую зону и маневренность механизма.

Хотя предыдущие исследования такого класса механизмов затрагивали те же вопросы (например, маневренность [2, 6, 7] или уравнения позиционирования [2, 5, 6]), мы считаем, что всестороннее исследование физических ограничений и рабочей зоны с привлечением аналитических и вычислительных методов крайне необходимо и проведенная работа заслуживает внимания.

## 2. Кинематический (цифровой) синтез

Хорошо известно, что любой механизм, используемый в качестве универсального манипулятора, должен иметь не менее шести управляемых степеней свободы. Для манипуляторов с антропоморфной конфигурацией во многих случаях простого применения число управляемых степеней свободы может быть менее шести, если принимать во внимание факторы стоимости и простоты конструкции. Платформа Стюарта [2] имеет шесть стержней с изменяющейся длиной и шесть степеней свободы. При рассмотрении этого платформенного механизма или каких-либо аналогичных механизмов возникает ряд вопросов. Например, почему необходимо иметь шесть связующих стержней или, что то же самое, какова связь между числом стержней и числом управляемых степеней свободы в механизмах такого типа? Можно ли ввести в механизм большее число стержней, сохранив при этом шесть управляемых степеней свободы? Какой смысл иметь более или менее шести управляемых степеней свободы? Именно эти вопросы и будут рассматриваться в настоящем разделе.

**2.1. Платформа типа  $n$ -SS.** Начнем с рассмотрения платформы с  $n$  сферическими шарнирами ( $n$ -SS), представленной на фиг. 1. Так как стержни и пластины в платформе соединены между собой сферическими шарнирами, а степени свободы сферического шарнира неуправляемы, то определим сначала число  $n$  такое, чтобы механизм не имел ни одной степени свободы (т. е. чтобы он был неподвижен).

В общем случае уравнение числа степеней свободы как для плоского, так и для пространствен-

ного механизмов может быть записано в следующем виде [8]:

$$F = \lambda(l - j - 1) + \sum_i^j f_i - I_d, \quad (1)$$

где  $F$  — реальное число степеней свободы узла или механизма;  $\lambda$  — число степеней свободы пространства, в котором работает механизм (для пространственного движения  $\lambda = 6$ , для движения в плоскости или по поверхности  $\lambda = 3$ );  $l$  — число стержней;  $j$  — число шарниров;  $f_i$  — число степеней свободы  $i$ -го шарнира;  $I_d$  — мнимые или пассивные степени свободы.

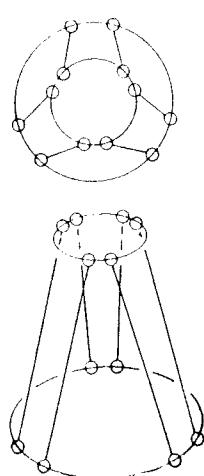
Известно, что существуют особые геометрические соотношения, которые необходимо учитывать при определении степеней свободы пространственных механизмов. Особые случаи, как правило, связаны с параллельными, пересекающимися или перпендикулярными осями шарниров. Соответствующий параметр  $I_d$  и указывает на эти мнимые степени свободы.

Обращаясь к фиг. 1, мы имеем  $\lambda = 6$ ,  $l = n + 2$  (учитываются  $n$  стержней и 2 пластины),  $j = 2n$  и  $f_i = 3$  (для каждого сферического шарнира число степеней свободы равно 3). Следует также отметить, что каждая пара сферических шарниров, связанных с одним и тем же стержнем, может свободно вращаться относительно оси стержня; поэтому она сама по себе создает мимую степень свободы, не влияющую на подвижность механизма в целом. А это значит, что подвижность механизма определяют только шесть степеней свободы двух шаровых шарниров. Поэтому коэффициент  $I_d = n$ , что соответствует числу  $SS$  пар или числу стержней. Используя уравнение (1), получим

$$F = 6 - n. \quad (2)$$

Уравнение (2) означает, что при  $n = 6$  число степеней свободы платформы равно нулю, т. е. шестистержневая платформа со сферическими шарнирами является жесткой конструкцией. При  $n < 6$  мы имеем  $6 - n$  неуправляемых степеней свободы, а при  $n > 6$  платформа статически неопределенна.

**2.2. Механизм типа  $n$ -SPS или  $n$ -SCS.** У механизма типа  $6$ -SS, являющегося жесткой конструкцией, маневренность отсутствует. Для того чтобы получить управляемое движение этого механизма, в каждый стержень вводят вращательные или поступательные шарниры. На фиг. 2 показано, что каждый вращательный шарнир может управляться от двигателя или от линейного привода, и поэтому длину каждого стержня можно регулировать независимо. Вращательный шарнир имеет две степени свободы, однако, учитывая те же рассуждения, что и в предыдущем разделе, отметим, что на подвижность механизма оказывает влияние только поступательная степень свободы, а вращательная степень является избыточной. Это означает, что стержень  $SCS$  в данном конкретном случае кинематически эквивалентен стержню  $SPS$  (здесь  $C$  обозначает вращательную пару). Для платформы типа  $n$ -SPS имеем  $l = 2n + 2$  и  $j =$



Фиг. 1. Платформенный механизм типа 6-SS.

$= 3n$ , поэтому

$$F = 6[(2n+2) - 3n - 1] + \sum_{i=1}^{2n} 3 + \sum_{i=1}^n 1 - n = \\ = -6n + 6 + 6n + n - n = 6. \quad (3)$$

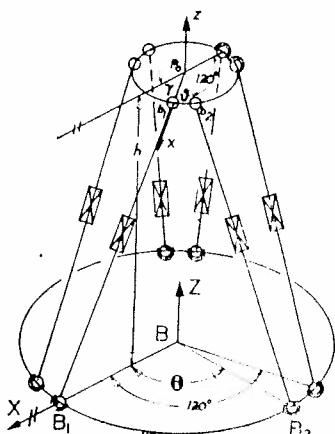
Решение уравнения (3) показывает, что платформа типа  $n$ -SPS всегда имеет шесть степеней свободы,  $n$  из которых управляемы. Если  $n < 6$ , то число неуправляемых степеней свободы равно  $6 - n$ . Если  $n > 6$ , то существует  $n - 6$  лишних управлений, которые, как видно из уравнения (2), нужны для компенсации получающейся избыточности. Лишь при  $n = 6$  имеется шесть управляемых степеней свободы. Этим и объясняется тот факт, что платформа типа 6-SPS является единственным механизмом, который можно использовать в робототехнике.

Возникает и другой интересный вопрос. Может ли платформа типа  $n$ -SPS со структурой (6 —  $n$ )-SS работать как манипулятор с  $n$  степенями свободы при  $n < 6$ ? Теоретически на этот вопрос можно ответить утвердительно, но на практике это не так. И причиной (которая станет понятной позже) здесь является то, что при заданных длинах стержней задача определения соответствующего положения (т. е. координат выходной точки и ориентации) верхней пластины становилась бы очень трудной. С другой стороны, если задано положение верхней пластины, то получить соответствующие длины стержней сравнительно просто, но при условии, что должно быть шесть регулируемых стержней. Из этого можно сделать вывод, что для манипуляторов платформенного типа нецелесообразно иметь число степеней свободы меньше шести, тогда как в шарирных антропоморфных манипуляторах часто возникает обратная ситуация.

### 3. Анализ положений и управляемость

Из предыдущего раздела следует, что платформа типа 6-SPS, имеющая шесть управляемых степеней свободы, может найти практическое применение в робототехнических устройствах. Целью настоящего раздела является проведение математического анализа решения прямой и обратной кинематических задач с последующей проверкой управляемости механизма.

*3.1. Анализ положений.* Применительно к ана-



Фиг. 2. И платформенный механизм типа 6-SPS и его конструктивные параметры.

литической модели платформы типа 6-SPS (фиг. 2) определим сначала входные, или управляемые, параметры и требуемые выходные параметры механизмов. Пусть, во-первых, управление положением осуществляется относительно точки  $p$ , лежащей в центре верхней пластины, т. е. точки, соответствующей схвату манипулятора. Во-вторых, пусть каждый стержень платформы имеет регулируемую длину и независимое управление, т. е. каждая поступательная или вращательная пара связана с приводом (или его аналогом). В-третьих, для простоты анализа и без ущерба для общности допустим, что верхняя и нижняя пластины имеют форму окружности, причем верхнюю пластину будем считать подвижной, а нижнюю — неподвижной с центром в точке  $B$ . Допустим, кроме того, что расположение пар сферических шарниров на нижней пластине симметрично относительно трех радиусов, расположенных под углом  $120^\circ$  друг к другу. Аналогично расположены и сферические шарниры на верхней пластине. Получившийся пространственный механизм представляет собой восьмиграник. Обозначим через  $r$  и  $R$  радиусы верхней и нижней пластин соответственно,  $l_1, \dots, l_6$  — длины стержней,  $l_0$  — начальную длину всех стержней и  $h$  — расстояние между двумя пластинами в случае, когда длины всех стержней равны между собой и равны  $l_0$ .

Для получения аналитического выражения кинематических связей механизма типа 6-SPS связаем систему прямоугольных координат с точкой  $B$ , направив ось  $Z$  вертикально вверх, а ось  $X$  — через точку  $B$ . Теперь можно определить положение сферических шарниров на нижней фиксированной пластине:

$$\begin{aligned} B_1 &= [R, 0, 0]^T, \\ B_2 &= [RC_0, RS_0, 0]^T, \\ B_3 &= [RC_{120}, RS_{120}, 0]^T, \\ B_4 &= [RC_{120+\theta}, RS_{120+\theta}, 0]^T, \\ B_5 &= [RC_{240}, RS_{240}, 0]^T, \\ B_6 &= [RC_{240+\theta}, RS_{240+\theta}, 0]^T, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\theta$  есть угол между сферическими шарнирами  $B_1$  и  $B_2$ ,  $B_3$  и  $B_4$ ,  $B_5$  и  $B_6$ , а через  $C_0$  и  $S_0$  обозначены соответственно  $\cos \theta$  и  $\sin \theta$ .

Аналогично привяжем подвижную прямоугольную систему координат  $[T]_p$  к верхней пластине, причем за начало координат выберем точку  $p$ ; ось  $z$  будем считать нормалью к пластине, а ось  $x$  — проходящей через точку  $b_1$ . Тогда соответствующее положение сферических шарниров  $b_i$  в подвижной системе координат заштриховано в следующем виде:

$$\begin{aligned} b_1 &= [r, 0, 0]^T, \\ b_2 &= [rC_\theta, rS_\theta, 0]^T, \\ b_3 &= [rC_{120}, rS_{120}, 0]^T, \\ b_4 &= [rC_{120+\theta}, rS_{120+\theta}, 0]^T, \\ b_5 &= [rC_{240}, rS_{240}, 0]^T, \\ b_6 &= [rC_{240+\theta}, rS_{240+\theta}, 0]^T, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\theta$  есть угол между шарнирами  $b_1$  и  $b_2$ ,  $b_3$  и  $b_4$ ,  $b_5$  и  $b_6$ .

Пусть точка  $p_0$  и прямоугольная система координат  $[T]_{p_0}$  совпадают с точкой  $p$  в случае, когда верхняя пластина находится в начальном (нулевом) положении, как показано на фиг. 4. Геометрические соотношения между системой координат  $[T]_{p_0}$  и неподвижной системой координат с центром в точке  $B$ , можно представить однородным преобразованием в виде матрицы размерностью  $4 \times 4$ :

$$[T]_{p_0} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

где  $\gamma = \theta - 0/2$ .

Допустим теперь, что центр верхней пластины перемещается из своего начального положения  $p_0$  к новому заданному положению  $p$  и имеет преобразование  $[T]_p$  относительно неподвижной системы координат  $[B]$ . Пусть

$$[T]_p = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & x_p \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & y_p \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & z_p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

где  $(x_p, y_p, z_p)$  — координаты точки  $p$  в прямоугольной системе координат, а  $(d_{11}, d_{21}, d_{31})$ ,  $(d_{12}, d_{22}, d_{32})$  и  $(d_{13}, d_{23}, d_{33})$  являются соответствующими направляющими косинусами осей  $x$ ,  $y$  и  $z$  от-

носительно системы координат  $[B]$ . Следовательно, положение каждого сферического шарнира на подвижной верхней пластине относительно системы координат  $[B]$  может быть получено из уравнений (5) и (7) и имеет вид

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = [T]_p \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11}r + x_p \\ d_{21}r + y_p \\ d_{31}r + z_p \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (8a)$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = [T]_p \begin{bmatrix} rC_\theta \\ rS_\theta \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11}rC_\theta + d_{12}rS_\theta + x_p \\ d_{21}rC_\theta + d_{22}rS_\theta + y_p \\ d_{31}rC_\theta + d_{32}rS_\theta + z_p \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (8b)$$

**3.2. Управляемость.** Управляемость манипулятора можно качественно оценить степенью трудности решения обратной кинематической задачи, которая заключается в определении обобщенных координат манипулятора при заданном положении хвата в неподвижной прямоугольной системе координат. У антропоморфных манипуляторов обобщенными координатами являются углы вращения в шарнирах, а у платформенных манипуляторов — длины стержней.

Пусть  $[T]_p$  является заданным положением хвата платформенного манипулятора. Абсолютное положение сферических шарниров  $b_i$  на верх-

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = [T]_p \begin{bmatrix} rC_{120} \\ rS_{120} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11}rC_{120} + d_{12}rS_{120} + x_p \\ d_{21}rC_{120} + d_{22}rS_{120} + y_p \\ d_{31}rC_{120} + d_{32}rS_{120} + z_p \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (8c)$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = [T]_p \begin{bmatrix} rC_{120+\theta} \\ rS_{120+\theta} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11}rC_{120+\theta} + d_{12}rS_{120+\theta} + x_p \\ d_{21}rC_{120+\theta} + d_{22}rS_{120+\theta} + y_p \\ d_{31}rC_{120+\theta} + d_{32}rS_{120+\theta} + z_p \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (8d)$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = [T]_p \begin{bmatrix} rC_{240} \\ rS_{240} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11}rC_{240} + d_{12}rS_{240} + x_p \\ d_{21}rC_{240} + d_{22}rS_{240} + y_p \\ d_{31}rC_{240} + d_{32}rS_{240} + z_p \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (8e)$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = [T]_p \begin{bmatrix} rC_{240+\theta} \\ rS_{240+\theta} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11}rC_{240+\theta} + d_{12}rS_{240+\theta} + x_p \\ d_{21}rC_{240+\theta} + d_{22}rS_{240+\theta} + y_p \\ d_{31}rC_{240+\theta} + d_{32}rS_{240+\theta} + z_p \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (8f)$$

ней пластине можно вывести из уравнения (8). Искомые длины стержней могут быть получены вычислением расстояния между соответствующими парами сферических шарниров  $b_i$  и  $B_i$ . Из уравнений (4) и (8) имеем

$$l_1^2 = (d_{11}r + x_p - R)^2 + (d_{21}r + y_p)^2 + (d_{31}r + z_p)^2, \quad (9a)$$

$$\begin{aligned} l_2^2 = & (d_{11}rC_\theta + d_{12}rS_\theta + x_p - RC_{120})^2 + \\ & + (d_{21}rC_\theta + d_{22}rS_\theta + y_p - RS_{120})^2 + \\ & + (d_{31}rC_\theta + d_{32}rS_\theta + z_p)^2, \end{aligned} \quad (9b)$$

$$\begin{aligned} l_3^2 = & (d_{11}rC_{120} + d_{12}rS_{120} + x_p - RC_{120})^2 + \\ & + (d_{21}rC_{120} + d_{22}rS_{120} + y_p - RS_{120})^2 + \\ & + (d_{31}rC_{120} + d_{32}rS_{120} + z_p)^2, \end{aligned} \quad (9c)$$

$$\begin{aligned} l_4^2 = & (d_{11}rC_{120+\theta} + d_{12}rS_{120+\theta} + x_p - RC_{120+\theta})^2 + \\ & + (d_{21}rC_{120+\theta} + d_{22}rS_{120+\theta} + y_p - RS_{120+\theta})^2 + \\ & + (d_{31}rC_{120+\theta} + d_{32}rS_{120+\theta} + z_p)^2, \end{aligned} \quad (9d)$$

$$\begin{aligned} l_5^2 = & (d_{11}rC_{240} + d_{12}rS_{240} + x_p - RC_{240})^2 + \\ & + (d_{21}rC_{240} + d_{22}rS_{240} + y_p - RS_{240})^2 + \\ & + (d_{31}rC_{240} + d_{32}rS_{240} + z_p)^2, \end{aligned} \quad (9e)$$

$$\begin{aligned} l_6^2 = & (d_{11}rC_{240+\theta} + d_{12}rS_{240+\theta} + x_p - RC_{240+\theta})^2 + \\ & + (d_{21}rC_{240+\theta} + d_{22}rS_{240+\theta} + y_p - RS_{240+\theta})^2 + \\ & + (d_{31}rC_{240+\theta} + d_{32}rS_{240+\theta} + z_p)^2. \end{aligned} \quad (9f)$$

Выражения (9) представляют собой записанную в явном виде систему уравнений связи входных и выходных параметров платформенного механизма типа 6-SPS. По заданному положению схвата получить соответствующие длины стержней довольно легко, а вот прямая кинематическая задача управления достаточно сложна, так как требует решения системы существенно нелинейных уравнений. Эта ситуация оказалась прямо противоположной той, которая складывается при создании роботов с разомкнутой кинематической цепью.

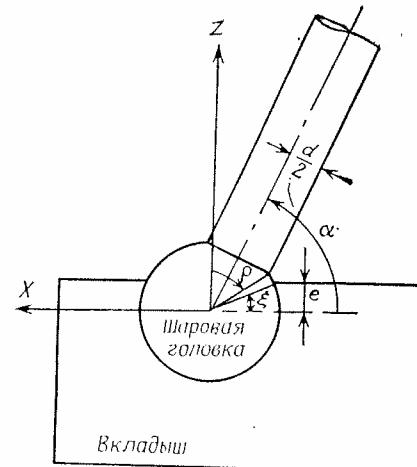
#### 4. Вращаемость сферических шарниров

Теоретически сферический шарнир может вращаться без ограничений относительно всех трех осей в прямоугольной системе координат; на практике, однако, это не так. Движение сферического шарнира всегда ограничено его физическими размерами. Такой шарнир, как правило, состоит из трех элементов: шаровой головки, вкладыша (сухаря) и соединительного стержня. Пусть радиусы шаровой головки и соединительного стержня равны соответственно  $R_b$  и  $d/2$  (фиг. 3). Для того чтобы физически закрепить шаровую головку во вкладыше, параметр  $e$  должен быть больше нуля. Обозначим угол вращения шарнира в плоскости  $XZ$  через  $\alpha$ . Тогда ограничения, накладываемые на вращение угла  $\alpha$ , можно определить следующим образом:

$$\xi = \arcsin(e/R_b), \quad (10)$$

$$\rho = (\pi/2 - \alpha) + \arcsin[(d/2)/R_b]. \quad (11)$$

Для свободного вращения  $\rho$  должно быть меньше или равно  $\pi/2 - \xi$ ; из уравнений (10) и (11) полу-



Фиг. 3. Общий вид сферического шарнира в разрезе.

чаем

$$(\pi/2 - \alpha) + \arcsin[(d/2)/R_b] \leq \pi/2 - \arcsin(e/R_b)$$

или

$$\alpha \geq \arcsin(d/2R_b) + \arcsin(e/R_b) \quad (12)$$

Следовательно, весь диапазон вращения угла  $\alpha$  в плоскости  $XZ$  равен

$$\pi - \left( \arcsin \frac{d}{2R_b} + \arcsin \frac{e}{R_b} \right) \geq \alpha \geq \arcsin \frac{d}{2R_b} + \arcsin \frac{e}{R_b}. \quad (13)$$

Уравнение (13) может найти и практическое применение, поскольку оно устанавливает конструктивные ограничения сферических шарниров и позволяет получить ряд практических рекомендаций при конструировании таких шарниров.

#### 5. Рабочая зона и маневренность

Задача анализа границ рабочей зоны платформенного манипулятора типа 6-SPS является достаточно трудной. Кроме неизбежных трудностей, связанных с пространственной геометрией, этот механизм сам по себе определяется многосвязной структурой, а задача выхода в заданную точку порождает систему существенно нелинейных уравнений. Поэтому для простоты рассмотрим частный случай \*, в котором все шаровые шарниры равномерно распределены по границам верхней и нижней пластин, как это показано на фиг. 4 (т. е. углы  $\Theta$  и  $\Phi$  равны  $60^\circ$ ). Основной метод исследования рабочей зоны механизма — через перечные сечения трех конкретных плоскостей (фиг. 4), т. е. плоскости  $XZ$ , проходящей через

\* Здесь следует отметить, что существует единственное условие для равномерно распределенного случая, при котором анализ степеней подвижности, представленный в разд. 2, неприменим. Это случай, когда длины всех стержней равны, а верхняя и нижняя пластины параллельны друг другу. Такое условие аналогично хорошо известному случаю четырехзвенного параллелограмма с дополнительным звеном, но длине равным кривошипу и соединяющим средние точки шатуна и стойки. В этом случае особого соотношения звеньев общее уравнение для степеней свободы обычно не применяется.

5.2. *Almakkenielle eepxunet nuaçmuntu e yuñemow ope-*  
*nuñemuh uña tukamenielle quthuñ aqenheee. Jñan Mexahen-*  
*ma tñna 6-SPS kawmñlin crepñemuh nmehr upjedjeñih*  
*nseñehenin gromx Jñan, t.e.,  $l_i \text{ min} \leq l_i \leq l_i \text{ max}$ .*  
*Hpeñamójokum, qro ñce ctepñunh nñekot oñho n to ñe-*  
*orjapamñene ha Jñiny; jorja ñbrñwñne jorja p-*  
*[ygaparñene (21)] oñpanñeno upjedjeñihmñ sñare-*

**Bimpaewenn (19)–(23)** Hypothecariae tot cōdon sa-  
mgaunyio a s̄r̄on n̄ne c̄nct̄my ȳpahenññ, oupe-  
meriaiomix h̄oñorkehne h̄oñorkeo et̄t̄lapehexahenññ, oupe-  
m̄exanm̄a e perjyñpymem̄a h̄inhanm̄ et̄pēpkhññ

$$\phi = \arg \left[ \left( l_1 S^{a_1} - l_1 C^{a_1} - x \right) \cdot \right.$$

$$a_4 = \operatorname{arc tg} [z_4/(x_4 + R)], \quad (22)$$

$$(16) \quad \begin{aligned} \cdot\overline{z}/(^nS^1l + ^1z) &= {}^d z \\ \cdot\overline{z}/(^nD^1l - y + ^1x) &= {}^d x \end{aligned}$$

parabolische Koordinaten  $p(x^a, z^b)$  bei (20)  $\rightarrow$

$$= \frac{1 - Q^2}{(R - Q^2) + V(R - PQ^2) + (1 + Q^2)(P^2 - R^2 - l^2)}.$$

loop invariant  $q \in \text{monom\_rep}(x)$  holds for all  $i \in \text{dom}(q)$ .

$$\text{formula} \quad (49)$$

$$\bar{Q} = \frac{2R - l_1 C_{q1}}{l_1 S_{q1}}, \quad (18)$$

$$P = \frac{I_1^2 + I_2^2 - 4r^2 - 2R^2}{2I_1 S_{41}}, \quad (17)$$

$$z_3 = \frac{2l_1 s_{41}}{l_1 s_{41} + l_2 s_{41}}, \quad z_4 = \frac{l_2 s_{41}}{l_1 s_{41} + l_2 s_{41}} x_4. \quad (16)$$

THE NEW YORK TIMES

$$(c_1) \quad z^{\mathbf{t}z} = z^{(\mathbf{t}z)} + z(y + \mathbf{t}x)$$

Philipparhinen bräcka omkring medan jag är här i en liten skräck.

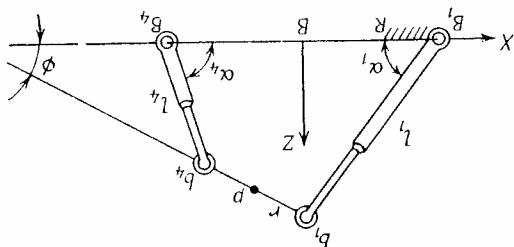
$$(y_1) \cdot \pi^q y = \pi^{(q)} S^1 l =$$

The following table gives the results of the experiments made by Mr. J. C. Goss, of the Bureau of Fisheries, on the growth of salmon in different waters.

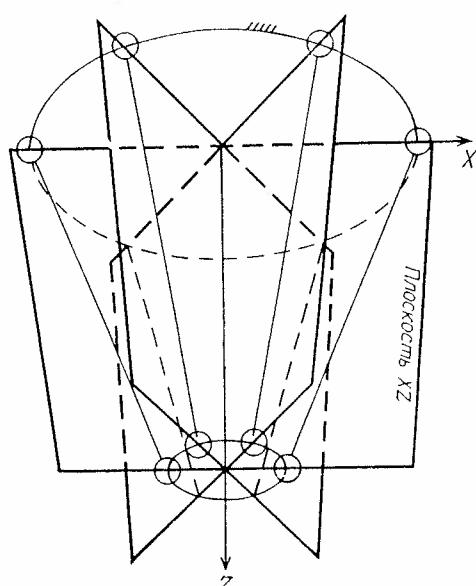
51. *Ahanas novyutonupoevna nacoko go temu-  
de xxeennoogo mexatunaka e peryxupigewemaku bauanak  
cemekkneu (seebhee). Ha fir. 5 novzaan hiockrin  
qerppexrehmuy mexahnam c pergyunpyeniam jui-  
hem ceppewheni l. n. l. Gicrema koopejnhar [B]  
B1, b4, B4 — ronjashatapaho hiebo. Torkin  
no neppx, a och X — ronjashatapaho hiebo. Torkin  
nupravaa k torke B1, och Z hanparjeha repinkarab-  
no neppx, a och X — ronjashatapaho hiebo. Torkin  
B1, b4, B4, ha xoxojunnixca na nizneneh nizactinne, parhni co-  
ntra hemorhiniix cefepnqekix mapuhnpox B1*

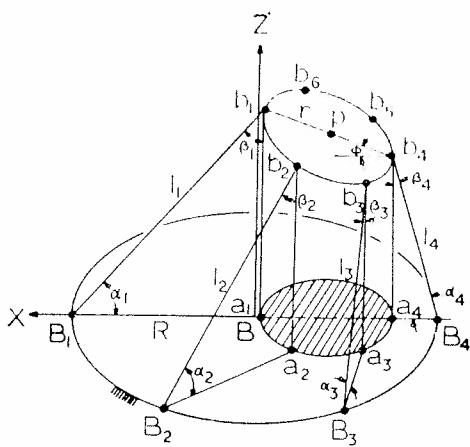
efepnakeine mapnypa B<sub>1</sub>, b<sub>4</sub>, B<sub>4</sub>, n mpxy njoce  
sootteretereuno ha yjml 60 n 120°. Htoda euee  
upocrtint saay, rimmeniacthini ctyqan, rora  
spapmeni repxneqit nraetnhi Mexahnamia roamokho  
togiiko othcneqatrho oen X, a bpmenee ee otchoen-  
tejapho oecn X n Z oreyytergret. Temeph saaya  
chrejach k naxoxmehno othgactn jocctnwhni ylent-  
gapjaphon rokrn p, pacqonoksehnoh na hattyhe njoce-  
koro teatipexarehnoh Mexahnamia (cm, fin. 5) e  
perlyjnypemrln ujhinaan shnper l, n l<sub>4</sub>, nmehdio-  
unimica a cootteretern e paajuhinian ophanhenni-  
wn Mexahnamia (jarmin, hanpmed, karj nuanan  
nemehenni jauin ctepkahii n pcamnemocbr reex  
yapuhehne noanunonuhpaahn stolo nnoeheroro he-  
mapnypa). C yketom crkaahnoh rame rribegfem  
tadpehexrehnoh Mexahnamia, noceje hero hajomnm

Fig. 5. Theoretical heteroplexehammin hexahydrate ( $\text{Hg}(\text{Py})_2\text{NH}_2\text{H}_2\text{O}_6$ ).



Phiir. 4. Hartöffelopferhain Mexicanus trianae B.-S. & P. e parvulae.





Фиг. 6. Геометрические параметры планарного механизма.

ниями длин стержней  $b_1B_1$ ,  $b_2B_2$ ,  $b_3B_3$ ,  $b_4B_4$ , т. е.  
 $l_{\min} \leq l_1, l_2, l_3, l_4 \leq l_{\max}$ . (24)

Так как верхняя пластина симметрична относительно плоскости  $XZ$ , то стержни  $b_5B_5$  и  $b_6B_6$  соответственно являются зеркальными отражениями стержней  $b_3B_3$  и  $b_2B_2$  и в наших рассуждениях не рассматриваются.

При заданных значениях длин стержней  $l_1$  и  $l_4$  необходимо знать, не превысили ли стержни  $l_2$  и  $l_3$  свои предельные значения. Рассматривая фиг. 6, получим

$$l_i^2 = \overline{B_i a_i}^2 + \overline{b_i a_i}^2, \quad (25)$$

где точки  $a$  являются проекциями точек  $b$  на плоскость  $X$ . Расстояния  $\overline{B_i a_i}^2$  и  $\overline{b_i a_i}^2$  выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \overline{B_1 a_1}^2 &= (R - 2rC_\phi - x_4)^2, \\ \overline{B_2 a_2}^2 &= (0,5R - 1,5rC_\phi - x_4)^2 + (RS_{60} - rS_{60})^2, \\ \overline{B_3 a_3}^2 &= (-0,5R - 0,5rC_\phi - x_4)^2 + (RS_{60} - rS_{60})^2, \\ \overline{B_4 a_4}^2 &= (-R - x_4)^2, \end{aligned} \quad (26)$$

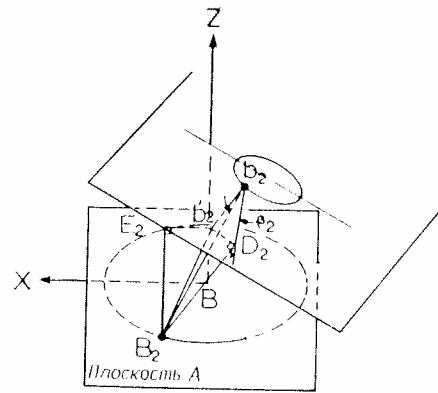
$$\begin{aligned} \overline{b_1 a_1} &= z_4 + 2rS_\phi, \\ \overline{b_2 a_2} &= z_4 + 1,5rS_\phi, \\ \overline{b_3 a_3} &= z_4 + 0,5rS_\phi, \\ \overline{b_4 a_4} &= z_4, \end{aligned} \quad (27)$$

где угол наклона  $\phi$  верхней пластины задается уравнением (23). Искомые значения длин стержней  $l_2$  и  $l_3$  можно вычислить из уравнений (25)–(27).

5.3. Вращаемость сферических шарниров на нижней пластине. Рабочей зоной, взятой относительно точки  $p$  на верхней пластине [уравнение (21)], является область, пределы которой определяются ограничениями от сферических шарниров, задаваемыми уравнением (13), и ограничениями от пересечения звеньев. Соответствующие углы сферических шарниров на нижней пластине можно легко выразить через известные параметры  $\alpha_1$ ,  $l_1$  и  $l_4$ . Как показано на фиг. 6,

$$\alpha_i = \operatorname{arctg} (b_i a_i / \overline{B_i a_i}), \quad (28)$$

где угол  $\alpha_4$  можно определить из уравнения (22).



Фиг. 7. Метод определения расстояния  $\overline{B_2 D_2}$ .

5.4. Вращаемость сферических шарниров на верхней пластине. Как показано на фиг. 6, углы, определяющие положение сферических шарниров на верхней пластине, т. е. углы  $\beta$ , образованы соответственно каждым стержнем и верхней пластиной. Имеем

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \alpha_1 + \phi, \\ \beta_4 &= ABS(\alpha_4 - \phi), \end{aligned} \quad (29)$$

где  $\phi$  есть угол наклона верхней пластины. Углы положений  $\beta_2$  и  $\beta_3$  выражаются, однако, не так просто. Их вывод требует спачала определения расстояния между сферическим шарниром  $B_2$  (или  $B_3$ ) и плоскостью верхней пластины, т. е. расстояния  $\overline{B_2 D_2}$  (или  $\overline{B_3 D_3}$ ), показанного на фиг. 7. Один из способов определения расстояния  $\overline{B_2 D_2}$  заключается в расчете геометрических соотношений проекции треугольника  $B_2 b_2 D_2$  на плоскость  $A$ , параллельную оси  $XZ$  и проходящую через линию  $B_2 D_2$ . Расстояние  $\overline{B_2 D_2}$  тогда может быть получено следующим образом:

$$\overline{B_2 D_2} = \overline{B_2 b_2} \sin \lambda, \quad (30)$$

где

$$\begin{aligned} \overline{B_2 b_2} &= \sqrt{\overline{B_2 E_2}^2 + \overline{b_2 E_2}^2} = \\ &= \sqrt{(z_4 + 1,5rS_\phi)^2 + (1,5rC_\phi + x_4 - 0,5R)^2}, \\ \lambda &= \pi - ABS \left[ \operatorname{arctg} \frac{\overline{B_2 E_2}}{\overline{b_2 E_2}} \right] + \phi. \end{aligned}$$

Угол, определяющий положение сферического шарнира  $b_2$ , можно тогда подсчитать из соотношения

$$\beta_2 = \arcsin (\overline{B_2 D_2} / l_2). \quad (31)$$

Аналогично можно получить и значение другого угла, определяющего положение сферического шарнира  $b_3$ :

$$\beta_3 = \arcsin (\overline{B_3 D_3} / l_3), \quad (32)$$

где

$$\begin{aligned} \overline{B_3 D_3} &= \\ &= \sqrt{(z_4 + 0,5rS_\phi)^2 + (0,5rC_\phi + x_4 + 0,5R)^2} \sin \lambda. \end{aligned}$$

Получив аналитические выражения необходимых кинематических соотношений для частного

случае механизма типа 6-SPS, мы можем теперь разработать численный алгоритм определения границ достиженности механизма в плоскости XZ.

## 6. Численный алгоритм

Алгоритм для определения границ зоны достиженности механизма типа 6-SPS в плоскости XZ выглядит следующим образом:

1.1. Изменять угол  $\alpha_1$  в допустимых пределах вращения данного сферического шарнира.

1.2. Изменять длины стержней  $l_1$  и  $l_4$  в допустимых пределах.

2. Для определенного набора значений  $\alpha_1$ ,  $l_1$  и  $l_4$ :

2.1. Проверить пределы соответствующих длин стержней  $l_2$  и  $l_3$ .

2.2. Проверить пределы соответствующих углов сферических шарниров  $\alpha$  и  $\beta$ .

Если эти пределы превышены, вернуться к шагу 1, если нет — продолжать счет.

3. Определить требуемое положение центра верхней пластины, т. е. точки  $p(x_p, z_p)$ , и записать экстремальные значения в базу данных. Возвращаться к шагу 1 до тех пор, пока не будет завершена вся операция перебора.

4. Вывести на печать границу зоны достиженности, пользуясь записанными в базе данных экстремумами.

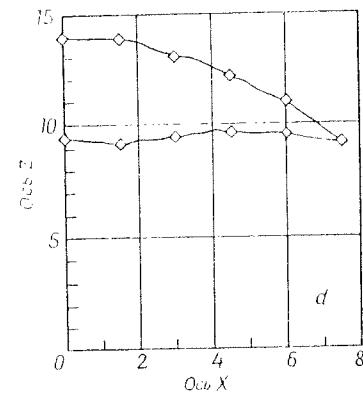
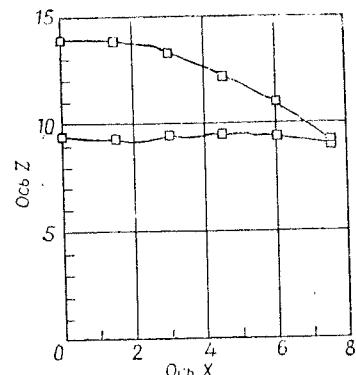
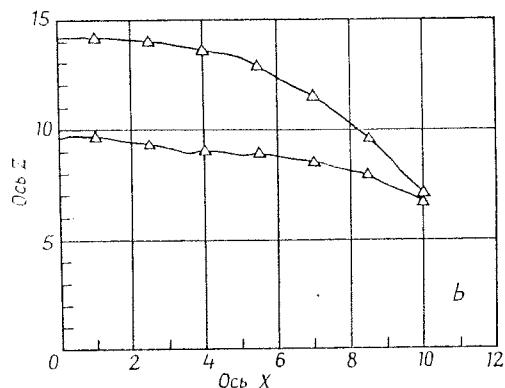
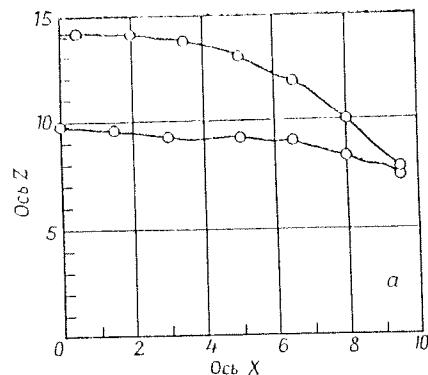
На основе аналитических выражений и критериев, полученных в настоящей работе, была написана программа для ЭВМ на языке фортран. Для платформы типа 6-SPS с равномерно распределенными шарнирами программа распечатывала границу зоны достиженности в плоскости XZ относительно центральной точки  $p$  верхней пластины. Входными параметрами для программы являлись: ширина шаровой полости сферического шарнира  $e$ , радиус шаровой головки  $R_b$ , диаметр соединительных стержней  $d$ , пределы изменения соединительных стержней  $l_{\max}$  и  $l_{\min}$ , радиусы верхней и нижней пластин  $r$  и  $R$ , длины стержней  $l_1$  и  $l_4$ . Требовалось определить область изменения шарнирного угла  $\alpha_1$ .

Для того чтобы проиллюстрировать диапазон изменения зоны достиженности и маневренность механизмов такого типа, было рассмотрено четыре конкретных примера.

Пример 1. Использованный механизм имеет следующие безразмерные параметры:  $l_{\max} = 15$ ,  $l_{\min} = 10$ ,  $r = 2$ ,  $R = 5$ ; размеры сферического шарнира:  $e = 0,1$ ,  $R_b = 0,5$ ,  $d = 0,2$ . На фиг. 8, а показано построенное с помощью алгоритма сечение зоны достиженности плоскостью XZ.

Пример 2. Все начальные параметры остались такими же, как в примере 1, кроме ширины вкладыша и диаметра соединительных стержней сферического шарнира, которые уменьшены в два раза по сравнению с первоначальными значениями, т. е. равны соответственно  $e = 0,05$  и  $d = 0,1$ . На фиг. 8, б представлено сечение зоны достиженности плоскостью XZ.

Пример 3. Все начальные параметры остались таким же, как в примере 2, кроме радиуса верхней пластины, который уменьшен в два раза,



Фиг. 8. Границы зоны достиженности в плоскости XZ.

т. е. равен  $r = 1$ . На фиг. 8, с представлено сечение зоны достиженности плоскостью XZ.

Пример 4. Все начальные параметры остались таким же, как в примере 1, кроме радиуса верхней пластины, который уменьшен в два раза, т. е. равен  $r = 1$ . На фиг. 8, д представлено сечение зоны достиженности плоскостью XZ.

## 7. Заключение

В предлагаемой работе выполнено начальное кинематическое исследование манипуляторов платформенного типа. Оказалось, что только механизм типа 6-SPS (или платформу Стюарта) можно использовать в качестве устройства позиционирования. Получены аналитическая модель и уравнения для решения обратной задачи. Сложность модели и решение обратной задачи упростились по сравнению с шестишарнирным антропоморфным роботом, однако одновременно ухудшились зоны обслуживания и маневренность, что объясняется многосвязностью структуры и взаимозависимостью сферических шарниров, стержней и пластин. В отличие от некоторых предыдущих исследований [5, 6], где в аналитической модели сферические шарниры заменялись двумя вращательными шарнирами, в настоящей работе учитывалась вращаемость сферических шарниров, так что полученные формулы могут, по нашему мнению, найти практическое применение. Результаты исследования зоны достоверности для частного случая дают представление о верхней границе при выбранных параметрах.

Следует, однако, отметить, что эти исследования относятся только к кинематике. Для практического воплощения такой платформы необходимо выполнить исследования статики и динамики рассматриваемого механизма, которые как раз и

проводятся в настоящее время. Мы надеемся, что результаты этой работы будут способствовать более глубокому уяснению как недостатков, так и потенциальных возможностей манипуляторов такого типа.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Pieper D. L., «The Kinematics of Manipulators Under Computer Control», Stanford Artificial Intelligence Laboratory, Stanford University, AIM 72, Oct. 1968.
2. Stewart D., «A Platform with Six Degrees of Freedom», *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, Vol. 180, Part 4, No. 15, 1965-66, pp. 371-386.
3. Hunt K. H., *Kinematic Geometry of Mechanisms*, Oxford University Press, London, 1978.
4. Hoffman R., McKinnon M. C., «Vibration Modes of an Aircraft Simulator Motion System», *Proceedings of the Fifth World Congress for the Theory of Machines and Mechanisms*, an ASME Publication, 1979, pp. 603-606.
5. McCallion H., Truong P. D., «The Analysis of a Six-Degree-of-Freedom Work Station for Mechanised Assembly», *Proceedings of the Fifth World Congress for the Theory of Machines and Mechanisms*, an ASME Publication, 1979, pp. 611-616.
6. Fichter E. F., McDowell E. D., «A Novel Design for a Robot Arm», *Advances in Computer Technology*, an ASME Publication, 1980, pp. 250-256.
7. Hunt K. H., «Structural Kinematics of In-Parallel-Actuated Robot-Arms», ASME Paper 82-DET-105, 1982. См. также Хант, «Кинематические структуры манипуляторов с параллельным приводом», *Конструирование и технология машиностроения*, № 4, 1983, с. 201, изд-во «Мир».
8. Freudenstein F., Maki E. R., «The Creation of Mechanisms According to Kinematic Structure and Functions, Environment and Planning B», Vol. 6, 1979, pp. 375-391.

УДК 007.52

## Сугимото

(K. Sugimoto)

Hitachi, Ltd., Йокогама, Япония

## Применение винтового исчисления для определения скоростей в шарнирах роботов

(Determination of Joint Velocities of Robots by Using Screws)

Для определения скоростей в шарнирах руки робота применяется винтовое исчисление. Предлагаемый метод можно непосредственно использовать для контурного управления существующими промышленными роботами при движении хвата робота вдоль прямой линии. Скорости в шарнирах вычисляются посредством скалярного умножения двух типов винтов: одним из них является элемент ортогонального базиса винтовой группы (основными винтами которой являются винты, описывающие кинематические пары), а вторым — винт, описывающий многостепенное движение хвата. Вычисления могут быть произведены в течение некоторого заданного отрезка времени, пока робот находится в движении.

## 1. Введение

Обычно траектория хвата руки робота определяется в неподвижной прямоугольной системе координат путем вычисления промежуточных точек между несколькими опорными точками, через которые проходит начало системы координат, связанной со хватом [1]. Программные значения смещений в шарнирах в соответствующей промежуточной точке на каждом шаге во времени вычисляются путем решения алгебраического уравнения. В результате управление приводами осуществляется в соответствии с этими программными значениями.

Получено редакцией ASME 30 декабря 1981 г.

При произвольных углах между осями соседних шарниров такой метод расчета приводит к алгебраическому уравнению 32-й степени, которое может не иметь решений, выраженных в радикалах. Даже если рука робота имеет такую специфическую структуру, как у известных конструкций промышленных роботов, можно получить восемь наборов решений для смещений в шарнирах, из которых следует выбрать такой набор решений, чтобы траектория хвата была непрерывной. Эта проблема усложняет вычислительный алгоритм, используемый для управления роботом, и повышает стоимость вычислений.

Другим методом контурного управления рукой робота является вычисление скоростей в шарни-

